BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$$

1) Dziedzina funkcji

Mianowniki muszą być różne od zera, stąd:

$x \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad D=\Re\setminus\{0\}=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

2) Punkty przecięcia z osiami.

Punkt leży na osi x, gdy: $f(x)=0$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow$ Do wykresu funkcji należy punkt (1;0).

Punkt leży na osi y, gdy: $x=0$. Liczba 0 nie należy do dziedziny, a zatem nie ma punktów na osi y.

3) Parzystość i nieparzystość funkcji.

Funkcja jest parzysta, gdy $f(-x) = f(x)$

$f(-x)=\frac{1}{-x}-\frac{1}{(-x)^2}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$, czyli $f(-x) \neq f(x)$. Funkcja nie jest parzysta.

Funkcja jest nieparzysta, gdy $f(-x)=-f(x)$

$-f(x)=-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, czyli $f(-x) \neq -f(x)$. Funkcja nie jest nieparzysta.

4) Granice na końcach przedziałów określoności funkcji.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$$

5) Asymptoty.

a) Asymptota pionowa istnieje gdy w punktach nieokreśloności granica funkcji jest równa $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=-\infty$$

Funkcja ma asymptotę pionową: $x=0$.

b) Funkcja ma asymptotę poziomą $y=a$ gdy istnieje granica funkcji w nieskończoności.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$$

Funkcja ma asymptotę poziomą: $y=0$.

c) Funkcja ma asymptotę ukośną: $y=ax+b$, gdy granica funkcji $\frac{f(x)}{x}$ w nieskończoności równa a jest różna od zera i

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b \quad \vee \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x-1}{x^2}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x-1}{x^3}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{(x-1)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{3x^2}=0$$

Funkcja $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ nie ma asymptoty ukośnej, ponieważ $a=0$.

6) Pochodna funkcji.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-1} - x^{-2})' = -x^{-2} + 2x^{-3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

7) Przedziały monotoniczności

Funkcja jest rosnąca w przedziale, jeżeli $f'(x) > 0$ w tym przedziale.

Funkcja jest malejąca w przedziale, jeżeli $f'(x) < 0$ w tym przedziale.

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} > 0$$

$$\frac{-x+2}{x^3} > 0$$

$(-x+2 > 0 \quad \wedge \quad x > 0) \quad \vee \quad (-x+2 < 0 \quad \wedge \quad x < 0)$

$(x < 2 \quad \wedge \quad x > 0) \quad \vee \quad (x > 2 \quad \wedge \quad x < 0)$

$\Downarrow$ sprzeczność

$x \in (0;2) \Rightarrow$ funkcja jest rosnąca.

$x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty) \Rightarrow$ funkcja jest malejąca.

8) Ekstrema lokalne funkcji.

Funkcja ma ekstremum lokalne lub punkt przegięcia w punkcie $(x_0; y_0)$, jeżeli pochodna funkcji w tym punkcie równa się zero.

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x+2}{x^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$f(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Funkcja ma ekstremum w punkcie: $\left(2; \frac{1}{4}\right)$

9) Tabela i wykres funkcji.

x	$-\infty$	...	0	...	1	...	2	...	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	#	+	+	+	0	-	-
$f(x)$	0	$\searrow -\infty$	#	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0