## *BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI*

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

**1) Dziedzina funkcji**

Mianowniki muszą być różne od zera, stąd:

$x-2 \neq 0 \iff x \neq 2$

D=$\Re \setminus \{2\} = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

**2) Punkty przecięcia z osiami.**

Punkt leży na osi $x$, gdy: $f(x) = 0$

$\frac{x+1}{x-2} = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1 \Rightarrow$ Do wykresu funkcji należy punkt (-1;0).

Punkt leży na osi $y$, gdy: $x = 0$.

$f(0) = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Do wykresu funkcji należy punkt (0 ; -0,5).

**3) Parzystość i nieparzystość funkcji.**

Funkcja jest parzysta, gdy $f(-x) = f(x)$

$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-2}$, czyli $f(-x) \neq f(x)$. Funkcja nie jest parzysta.

Funkcja jest nieparzysta, gdy $f(-x) = -f(x)$

$-f(x) = -\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{-x-1}{x-2}$, czyli $f(-x) \neq -f(x)$. Funkcja nie jest nieparzysta.

**4) Granice na końcach przedziałów określoności funkcji.**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\{x+1)'}{(x-2)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\{x+1)'}{(x-2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1} = 1$$

**5) Asymptoty.**

a) Asymptota pionowa istnieje gdy w punktach nieokreśloności granica funkcji jest równa $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to2^-}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = -\infty \qquad \lim_{x\to2^+}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = +\infty$$

Funkcja ma asymptotę pionową: $x = 2$.

b) Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ gdy istnieje granica funkcji w nieskończoności.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\{x+1)'}{(x-2)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\{x+1)'}{(x-2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1} = 1$$

Funkcja ma asymptotę poziomą; $y = 1$.

c) Funkcja ma asymptotę ukośną: $y = ax + b$, gdy granica funkcji $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ i $a \neq 0$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x+1}{(x-2)x}\right) = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{(x+1)'}{(x^2-2x)'} = \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{1}{2x-2}\right) = 0$$

Funkcja $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ nie ma asymptoty ukośnej, ponieważ liczba $a = 0$

**6) Pochodna funkcji.**

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\frac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x-1}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}=-\frac{3}{(x-2)^2}$$

**7) Przedziały monotoniczności**

Funkcja jest rosnąca w przedziale, jeżeli $f'(x)>0$ w tym przedziale.

Funkcja jest malejąca w przedziale, jeżeli $f'(x)<0$ w tym przedziale.

Ponieważ dla każdego $x\neq 2$ prawdziwa jest nierówność: $-\frac{3}{(x-2)^2}<0$,

stąd wniosek, że:

$x\in(-\infty\,;2)\cup(2\,;+\infty)\Rightarrow$ funkcja jest malejąca.

**8) Ekstrema lokalne funkcji.**

Funkcja ma ekstremum lokalne lub punkt przegięcia w punkcie $(x_0\,;y_0)$, jeżeli pochodna funkcji w tym punkcie równa się zero.

Równość $-\frac{3}{(x-2)^2}=0$ dla każdego $x\neq 2$ jest fałszywa,

stąd wniosek, że funkcja nie ma ekstremum.

**9) Tabela i wykres funkcji.**

| $x$ | $-\infty$ | ... | -1 | ... | 0 | ... | 2 | ... | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | - | - | - | - | - | # | + | + |
| $f(x)$ | 1 | ↘ | 0 | ↘ | -0,5 | ↘ $-\infty$ | # | $+\infty$ ↘ | 1 |