BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

1) Dziedzina funkcji

Mianowniki muszą być różne od zera, stąd:

$x \neq 0$

D=$\Re \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2) Punkty przecięcia z osiami.

Punkt leży na osi x, gdy: $f(x) = 0$

$x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = 0$

Ponieważ $x^2 + 1 > 0$ dla każdej liczby $x \neq 0$, więc punkty położone na osi x nie istnieją.

Punkt leży na osi y, gdy: $x = 0$. Liczba 0 nie należy do dziedziny, a zatem nie ma punktów na osi y.

3) Parzystość i nieparzystość funkcji.

Funkcja jest parzysta, gdy $f(-x) = f(x)$

$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x}$, czyli $f(-x) \neq f(x)$. Funkcja nie jest parzysta.

Funkcja jest nieparzysta, gdy $f(-x) = -f(x)$

$-f(x) = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -x - \frac{1}{x}$, czyli: $f(-x) = -f(x)$. Funkcja jest nieparzysta.

4) Granice na końcach przedziałów określoności funkcji.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty - 0 = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \infty + 0 = \infty$$

5) Asymptoty.

a) Asymptota pionowa istnieje gdy w punktach nieokreśloności granica funkcji jest równa $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 - \infty = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 + \infty = +\infty$$

Funkcja ma asymptotę pionową: $x = 0$.

b) Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ gdy istnieje granica funkcji w nieskończoności.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty - 0 = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty + 0 = \infty$$

Funkcja nie ma asymptoty poziomej.

c) Funkcja ma asymptotę ukośną: $y = ax + b$, gdy granica funkcji $\frac{f(x)}{x}$ w nieskończoności równa a jest różna od zera i $\lim\limits_{x\to\mp\infty}(f(x) - ax) = b$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\mp\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1+0=1$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to\mp\infty}\left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Czyli: $a = 1$, $b = 0$.

Funkcja $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ma asymptotę ukośną: $y = x$

6) Pochodna funkcji.

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = (x + x^{-1})' = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

7) Przedziały monotoniczności

Funkcja jest rosnąca w przedziale, jeżeli $f'(x) > 0$ w tym przedziale.

Funkcja jest malejąca w przedziale, jeżeli $f'(x) < 0$ w tym przedziale.

$$1 - \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$$

$$x^2 - 1 > 0 \quad \wedge \quad x \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 > 1$$

$$\Updownarrow$$

$$x < -1 \ \vee \ x > 1$$

$x \in (-\infty\,; -1) \cup (1\,; +\infty) \Rightarrow$ funkcja jest rosnąca.

$x \in (-1\,; 0) \cup (0\,; 1) \Rightarrow$ funkcja jest malejąca.

8) Ekstrema lokalne funkcji.

Funkcja ma ekstremum lokalne lub punkt przegięcia w punkcie $(x_0\,; y_0)$, jeżeli pochodna funkcji w tym punkcie równa się zero.

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -1$$

$$f(-1) = -1 + \tfrac{1}{-1} = -2 \qquad f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Funkcja ma ekstrema lokalne w punktach: (-1 ; -2) i (1 ; 2)

9) Tabela i wykres funkcji.

x	$-\infty$	...	-1	...	0	...	1	...	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	#	-	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	#	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$