

BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

1) Dziedzina funkcji

Mianowniki muszą być różne od zera, stąd:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -1 \Rightarrow D = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$$

2) Punkty przecięcia z osiami.

Punkt leży na osi x , gdy: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{x^2 - 1} \neq 0 \text{ dla każdego } x \Rightarrow \text{Brak punktów na osi } x.$$

Punkt leży na osi y , gdy: $x = 0$.

$$f(0) = \frac{1}{0^2 - 1} = -1 \Rightarrow \text{Do wykresu funkcji należy punkt } (0; -1)$$

3) Parzystość i nieparzystość funkcji.

Funkcja jest parzysta, gdy $f(-x) = f(x)$

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1}, \text{ czyli } f(-x) = f(x). \text{ Funkcja jest parzysta.}$$

Funkcja jest nieparzysta, gdy $f(-x) = -f(x)$

$$-f(x) = -\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) = \frac{-1}{x^2 - 1}, \text{ czyli } f(-x) \neq -f(x). \text{ Funkcja nie jest nieparzysta.}$$

4) Granice na końcach przedziałów określoności funkcji.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) = 0$$

5) Asymptoty.

a) Asymptota pionowa istnieje gdy w punktach nieokreśloności granica funkcji jest równa $\pm \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) = +\infty$$

Funkcja ma asymptoty pionowe: $x = 1$ i $x = -1$

b) Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ gdy istnieje granica funkcji w nieskończoności.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) = 0$$

Funkcja ma asymptotę poziomą: $y = 0$.

c) Funkcja ma asymptotę ukośną: $y = ax + b$, gdy granica funkcji $\frac{f(x)}{x}$ w

nieskończoności równa a jest różna od zera i

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{1}{(x^2 - 1)x} = 0$$

Funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ nie ma asymptoty ukośnej, ponieważ $a = 0$.

6) Pochodna funkcji.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right)' = \frac{0 \cdot (x^2 - 1) - 1 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

7) Przedziały monotoniczności

Funkcja jest rosnąca w przedziale, jeżeli $f'(x) > 0$ w tym przedziale.

Funkcja jest malejąca w przedziale, jeżeli $f'(x) < 0$ w tym przedziale.

$$\frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} > 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge x \neq -1 \quad \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \neq 1$$

↓

$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \Rightarrow$ funkcja jest rosnąca.

$x \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \Rightarrow$ funkcja jest malejąca.

8) Ekstrema lokalne funkcji.

Funkcja ma ekstremum lokalne lub punkt przegięcia w punkcie $(x_0; y_0)$, jeżeli pochodna funkcji w tym punkcie równa się zero.

$$-\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$f(0) = \left(\frac{1}{0^2 - 1} \right) = -1$$

Funkcja ma ekstremum w punkcie $(0; -1)$

9) Tabela i wykres funkcji.

x	$-\infty$...	-1	...	0	...	1	...	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	#	+	0	-	#	-	-
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$	#	$-\infty \nearrow$	-1	$\searrow -\infty$	#	$+\infty \searrow$	0

